Щеглова Н.В.

Спецкурс №1.

№1. Для каждой пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению $2x^2 + y^2 + 3xy = 7$, вычислите значение выражения $x - y$ и укажите наименьшее из этих значений, умноженное на количество найденных пар.

№2. Для каждой пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению $2x^2 + 5y^2 + 6xy = 13$, вычислите сумму $2x + y$ и укажите наименьшую из этих сумм, умноженную на количество найденных пар.

№3. Сумма двух чисел равна 463, а разность их квадратов – простое число. Укажите большее из этих чисел.

№4. Вокруг треугольника ABC описана окружность. Из вершины B проведена биссектриса, пересекающая окружность в точке B_1, а из вершины A проведена высота, пересекающая окружность в точке A_1. Известно, что $AA_1 = BB_1$ и $\angle ABC = 80°$. Найдите остальные углы треугольника ABC и укажите в ответе их произведение.

№5. Внутри прямоугольного треугольника ABC $(\angle C = 90°)$ взята точка O так, что треугольники ABO, ACO, BCO равновеликие. Найдите CO, если $AO^2 + BO^2 = 5$.

№6. Найдите корень (удвоенную сумму корней, если их несколько) уравнения

$$\sqrt{x^2 - 9x + 24} - \sqrt{6x^2 - 59x + 149} = \sqrt{(x - 5)(x + 111)}.$$

№7. Найдите увеличенную в 6 раз сумму корней уравнения (или корень, если он один) $\frac{|2x-3|+9x^2+4-12|x|}{|15x+7|} = x - 2.$

№8. Найдите сумму всех различных корней уравнения

$$(x^2 + 3x - 2)^2 + 3(x^2 + 3x - 2) = x + 2.$$

№9. В треугольнике ABC центры описанной и вписанной окружностей симметричны относительно прямой AB. Найдите градусные меры углов треугольника ABC и укажите в ответе разность между наибольшим и наименьшим углом.

№10. Сколько решений имеет уравнение

$$(x^2 - 4x + 5)(y^2 + 6y + 12) = 3?$$

Щеглова Н.В.

Спецкурс №2.

№1. Пусть $ABCD$ – квадрат, а точка O лежит внутри квадрата. Известно, что $OC = OD = \sqrt{13}$, а $OB = \sqrt{5}$. Найдите площадь квадрата.

№2. Известно, что множеством значений квадратичной функции является промежуток $(-\infty; -1]$, коэффициент при x совпадает со свободным членом, а коэффициент при x^2 на единицу больше, чем свободный член. Найдите свободный член этой квадратичной функции.

№3. Найдите сумму различных решений уравнения

$x = (\sqrt{x+4} + x^2 + x - 4)(2 + \sqrt{x+4})$.

№4. Найдите сумму всех целых решений неравенства

$\left|\frac{1}{x-2}\right| + |2x+7| > \left|\frac{2x^2+3x-13}{x-2}\right|$.

№5. Отрезок AB является диаметром окружности, а точка C лежит вне этой окружности. Отрезки AC, BC пересекаются с окружностью в точках D, M соответственно. Найдите косинус угла ACB, если площади треугольников DCM и ACB относятся как 1:4. В ответ запишите величину $10cos\angle ACB$.

№6. Найдите сумму корней уравнения

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{1 - 16x^2}} + 1 = -x + 2\sqrt{1+4x} + \sqrt{1-4x}$.

№7. Из пункта A по прямолинейной дороге выехал автомобиль, а через некоторое время следом за ним – мотоциклист. Догнав автомобиль, мотоциклист повернул обратно и прибыл в пункт A в момент, когда автомобиль находился на расстоянии в 3 раза большем от A, нежели в момент выезда мотоциклиста. Во сколько раз скорость мотоциклиста больше, чем скорость автомобиля?

№8. Найдите наибольшее возможное значение суммы $x + y$, если x, y удовлетворяют уравнению

$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{13}$.

№9. Найдите четырехзначное натуральное число, в котором цифра тысяч, цифра сотен и двузначное число, составленное из его двух последних цифр, образуют геометрическую прогрессию, а произведение цифр искомого числа принимает максимально возможное значение при этих условиях.

№10. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность. Найдите среднюю линию трапеции, если ее большее основание AD равно 15, синус угла BAC равен 1/3, синус угла ABD равен 5/9.

<u>*Щеглова Н.В.*</u>

Спецкурс №3.

№1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BE, CD. Найдите длину BC, если $ED = 48$ и радиус окружности, описанной вокруг AED, равен 30.

№2. Из пункта A в пункт B одновременно выехали автомобиль и мотоцикл. В тот момент, когда мотоцикл преодолел половину пути, из пункта A в пункт B выехал велосипедист. К моменту прибытия автомобиля в пункт B велосипедист преодолел 1/24 часть пути. Найдите скорость автомобиля, если скорость мотоцикла в 4 раза больше скорости велосипедиста и на 24 км/ч меньше скорости автомобиля.

№3. Найдите корень (если корней несколько, то их сумму) уравнения

$$\sqrt{36 + (4 - x)(3 - \sqrt{x - 7})\sqrt{2 + x + 6\sqrt{x - 7}}} = -0{,}5x + 8.$$

№4. Найдите произведение корней (или корень, если он единственный) уравнения

$$|3x + 17| + |3x - 17| + |5x + 29| + |5x - 29| = x^2 - 36.$$

№5. Биссектриса при основании и основание равнобедренного треугольника равны 6 и 5 соответственно. Найдите боковую сторону этого треугольника.

№6. Точка M – середина стороны AC треугольника ABC. На отрезке MC отметили точку P такую, что $MP = PC$. Через M провели отрезок ME, параллельный BP (точка E принадлежит стороне AB). Найдите площадь $EBCP$, если площадь AEP равна 12.

№7. Прямые, содержащие биссектрисы углов A, B, C треугольника ABC, пересекают описанную около этого треугольника окружность в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Найдите градусную меру угла между прямыми CC_1 и A_1B_1.

№8. Найдите M – максимальное и m – минимальное возможные значения величины $2x + 3y$, если x; y удовлетворяют уравнению $\sqrt{x^2 + (y - 15)^2} + \sqrt{(x - 5)^2 + (y - 3)^2} = 13$, и укажите в ответе $M \cdot m$.

№9. Найдите наименьшее значение y, которое удовлетворяет целым решениям системы $\begin{cases} x + 18 = 2y^2 + 4z^2, \\ z - 18 = x^2 - 2y^2. \end{cases}$

№10. Найдите сумму всех нулей функции

$$y = (x - 3)^4 + (x - 2)^4 - (2x - 5)^4.$$

Щеглова Н.В.

Спецкурс №4.

№1.(B9) $ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма, у которой $AB = 3,\ AA_1 = 3\sqrt{2}$. Точки P, Q – середины ребер AB и A_1C_1 соответственно. Найдите значение выражения $\frac{49}{cos^2\varphi}$, где φ – угол между прямыми PQ и AB_1.

№2.(B11) По прямым параллельным путям равномерно в противоположных направлениях движутся два поезда: по первому – скорый поезд со скоростью 86,4 км/ч, по второму – пассажирский со скоростью 61,2 км/ч. По одну сторону от путей на расстоянии 90 м от первого и 30 м от второго растет дерево. Если пренебречь шириной пути, то в течение скольких секунд t пассажирский поезд, имеющий длину 40 м, будет загораживать дерево от пассажира скорого поезда? В ответе запишите значение выражения $15t$.

№3.(B12) Трое рабочих (не все одинаковой квалификации) выполнили некоторую работу, работая поочередно. Сначала первый из них проработал 1/12 часть времени, необходимого двум другим для выполнения всей работы. Затем второй проработал 1/12 часть времени, необходимого двум другим для выполнения всей работы. И, наконец, третий проработал 1/12 часть времени, необходимого двум другим для выполнения всей работы. Во сколько раз быстрее работа была бы выполнена, если бы трое рабочих работали одновременно? В ответ запишите найденное число, умноженное на 4.

№4.(B6) Три числа составляют геометрическую прогрессию, в которой $q > 1$. Если второй член прогрессии уменьшить на 10, то полученные три числа в том же порядке опять составят геометрическую прогрессию. Если третий член новой прогрессии уменьшить на 36, то полученные числа составят арифметическую прогрессию. Найдите сумму исходных чисел.

№5.(B10) Куб вписан в правильную четырехугольную пирамиду так, что четыре его вершины находятся на боковых ребрах пирамиды, а четыре другие вершины – на ее основании. Длина стороны основания пирамиды равна 1, высота пирамиды – 2. Найдите площадь S поверхности куба. В ответ запишите значение выражения $3S$.

№6.(B10) В прямоугольнике $ABCD$ выбраны точки L на стороне BC и M на стороне AD так, что $ALCM$ – ромб. Найдите площадь этого ромба, если $AB = 10, BC = 20$.

№7.(B10) Найдите произведение наименьшего и наибольшего целых решений неравенства $|12 + 4x - x^2| + 3 < 3 \cdot |6 - x| + |x + 2|$.

№8.(B10) Найдите произведение наименьшего целого решения на количество целых решений неравенства $\frac{35}{2+|18-x|} > |18 - x|$.

№9.(B11) Первые члены арифметической и геометрической прогрессий одинаковы и равны 2, третьи члены также одинаковы, а вторые отличаются на 4. Найдите шестой член арифметической прогрессии, если все члены обеих прогрессий положительны.

№10.(B7) Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды, если длина биссектрисы ее основания равна $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ и плоский угол при вершине равен $2arctg\frac{3}{4}$.

Щеглова Н.В.

Спецкурс №5.

№1. Окружность, построенная на стороне AC треугольника ABC как на диаметре, проходит через середину стороны BC и пересекает сторону AB в точке D так, что $AD = \frac{1}{3}AB$. Найдите площадь треугольника ABC, если $AC = 1$.

№2. Известно, что точки K, L лежат соответственно на сторонах AB, BC треугольника ABC, а O – точка пересечения AL, CK. Площади треугольников AOK, COL равны соответственно 1 и 8, а треугольник AOC и $BKOL$ равновелики. Найдите площадь треугольника ABC.

№3. Окружность, центр которой лежит на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, касается катетов AC и BC соответственно в точках E, D. Найдите величину угла ABC, если известно, что $AE = 1, BD = 3$.

№4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длина отрезка, соеединяющего середины AB, CD, равна 1. Прямые BC, AD перпендикулярны. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей AC, BD.

№5. В равнобедренном треугольнике с боковой стороной 10 проведена медиана, равная $\sqrt{153}$. Найдите длину медианы, проведенной к основанию треугольника.

№6. Один из углов трапеции равен 60^0, а прямые, содержащие боковые стороны, пересекаются под прямым углом. Найдите длину большей боковой стороны трапеции, если одно из оснований равно $\frac{4\sqrt{3}}{3}$, а средняя линия $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

№7. В треугольнике ABC сторона $AB = 4\sqrt{13}, BC = 2\sqrt{37}, AC = 2\sqrt{7}$. Найдите величину угла между медианами AM, CK.

№8. Найдите площадь S треугольника, образованного пересечением прямых $y = 3, y = -2x + 6, y = 0{,}5x + 3$. В ответ запишите $20S$.

№9. Найдите сумму целых решений неравенства $\frac{1+x^2-2x}{2x^2+20x+50} + \frac{9+x^2+6x}{2x^2-4x+2} \geq \frac{x+3}{x+5}$, принадлежащих отрезку $[-10; 10]$.

№10. В двух бригадах работает различное количество рабочих одинаковой квалификации. Отработав вместе 3 часа, вторая бригада перешла на другой участок, и первой пришлось работать еще 8 ч 15 мин, чтобы выполнить весь объем работы. Если бы вторая бригада ушла на 1 час позже, то первой пришлось бы работать еще 6 часов для завершения всей работы. На сколько процентов количество работников в первой бригаде меньше, чем во второй?

Спецкурс №6.

№1. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + 5y^2 - 4xy + 2x - 8y + 5 = 0, \\ x^3 + y^3 + xy = 41. \end{cases}$

В ответе укажите сумму всех найденных значений x, y.

№2. Найдите увеличенную в 24 раза сумму тангенсов острых углов прямоугольного треугольника, если радиус описанной окружности относится к радиусу вписанной как 5 : 2.

№3. В треугольнике ABC проведен отрезок BD так, что точка D лежит на стороне AC и $CD = AB$. Точка M – середина отрезка AD, точка N – середина отрезка BC. Найдите величину угла NMC, если угол BAC равен 72^0.

№4. Точки M, K принадлежат сторонам BC, AC треугольника ABC так, что $BM\colon MC = 3\colon 5, AK\colon KC = 2\colon 7$. Отрезки AM, BK пересекаются в точке O. Найдите значение выражения $21 \cdot \frac{AO}{OM}$.

№5. Найдите все целые значения переменных $x; y$, удовлетворяющих уравнению $3x^2 - 2y - 6x + xy = 17$. В ответе укажите сумму всех таких y.

№6. Три брата получили в наследство от деда акции нефтяной компании, которые были разделены между ними в отношении 5 : 6 : 7. Если бы это же количество акций было разделено между ними в отношении 4 : 5 : 6 соответственно, то один из братьев получил бы на 25 акций больше. Найдите количество всех завещанных акций.

№7. Найдите произведение корней уравнения
$x^4 + 7x^2 - 12x\sqrt{x^2 + 7} + 20x\sqrt{2x^2 + 14} = 240\sqrt{2}$.

№8. Найдите среднее арифметическое корней (или корень, если он один) уравнения $\left(\sqrt{x + 17} - 3\right)\left(\sqrt{x + 4} + 2\right) = x$.

№9. Задумано натуральное трехзначное число. Если поменять местами крайние цифры числа, то полученное число будет на 396 меньше исходного. Если поменять местами две первые цифры числа, то полученное число будет на 180 больше исходного. Найдите исходное число, если сумма его цифр равна 13.

№10. Найдите значение выражения $8\sqrt{2}(cos\alpha - 6sin\alpha)$, если известно, что α – угол III четверти и $4sin\alpha - 0{,}5sin2\alpha = 4cos\alpha - sin^2\alpha$.

Спецкурс №7.

№1.Решите систему уравнений $\begin{cases} y+3=(4-x)^2, \\ (y+5)^2=z(2y+7), \\ x^2+z^2=6x, \text{если } z \geq 0. \end{cases}$
В ответе укажите сумму всех найденных значений x, y, z.

№2.В равнобедренном остроугольном треугольнике ABC основание $AC = 24$, а расстояние от вершины B до точки M пересечения высот равно 7. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

№3.Центр окружности, касающейся катетов прямоугольного треугольника, лежит на гипотенузе. Найдите радиус окружности, если он в 7 раз меньше суммы катетов, а площадь треугольника равна 56.

№4.Решите уравнение $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+6}+2\sqrt{(x-2)(x+6)}=2(8-x)$.

№5.Высота и биссектриса прямоугольного треугольника, опущенные из вершины прямого угла, равны соответственно 6 и 8. Найдите площадь треугольника.

№6.Квадратный трехчлен $f(x)=ax^2+bx+c$ таков, что $f\left(\frac{a-b-c}{2a}\right)=f\left(\frac{c-a-b}{2a}\right)=0$. Найдите значение выражения $f(-1)\cdot f(1)$.

№7.Найдите четырехзначное натуральное число, в котором цифра тысяч, цифра сотен и двузначное число, составленное из его двух последних цифр, образуют геометрическую прогрессию, а его три последние цифры – арифметическую прогрессию.

№8.Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Лучи BA, CD пересекаются в точке L, а лучи BC, AD – в точке K. Найдите величину угла BAD (в градусах), если $\angle CKD - \angle ALD = 60°$.

№9.Если пара $(x_0;\, y_0)$ – решение системы уравнений $\begin{cases} 3x-2y+8=0, \\ y+3=\sqrt{x^2+6x+9}, \end{cases}$ то чему равно значение выражения $5x_0-7y_0$?

№10.Два транспортера в аэропорту, работая одновременно, доставляли багаж пассажирам за 40 минут. После реконструкции скорость доставки груза первым транспортером увеличилась в 2 раза, а вторым – на 50%. Теперь они доставляют такой же багаж за 24 минуты, если работают одновременно. Сколько часов занимала доставка багажа первым транспортером до реконструкции, если второй находился в ремонте?

Щеглова Н.В.

Спецкурс №8.

№1. Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно $6\sqrt{7}$. Пусть N – точка касания вписанной окружности с боковой стороной AB, а M – точка пересечения вписанной окружности с отрезком CN $(M \neq N)$. Найдите радиус вписанной окружности, если $CM = MN$.

№2. Угол при вершине C треугольника ABC равен 40^0. Пусть O – центр окружности, описанной около этого треугольника. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что биссектриса угла CBA перпендикулярна прямой AO.

№3. Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, удален от концов боковой стороны на расстояния 8 см и 4 см. Найдите среднюю линию трапеции.

№4. Два пешехода движутся в один и тот же пункт по прямолинейным дорогам каждый со своей постоянной скоростью. В начальный момент времени положения пешеходов и пункта, в который они движутся, образуют равносторонний треугольник. После того, как первый пешеход прошел 8 км, указанный треугольник стал прямоугольным. В момент прибытия второго пешехода в пункт назначения первому осталось пройти еще 12 км. Определите расстояние между пешеходами в начальный момент времени.

№5. Отрезок AD является биссектрисой прямоугольного треугольника ABC с прямым углом при вершине C. Окружность радиусом $\sqrt{15}$ проходит через точки A, C, D и пересекает сторону AB в точке F так, что $\frac{AF}{AB} = \frac{3}{5}$. Найдите площадь треугольника ABC.

№6. Стороны AC, BC равнобедренного треугольника ABC равны 10 м, а угол при вершине C равен 30^0. Из вершин A и B одновременно в сторону вершины C начали ползти две улитки, каждая со своей постоянной скоростью. Через час после начала движения площадь треугольника, образованного улитками и точкой C, равнялась 14 м^2. Еще через час эта площадь равнялась 6 м^2 (при этом улитки не доползли до вершины C). Во сколько раз скорость одной улитки больше скорости другой?

№7. В треугольнике ABC проведена биссектриса AP. Известно, что $BP = 16, PC = 20$ и центр окружности, описанной около треугольника APB, лежит на отрезке AC. Найдите длину стороны AB.

№8. Найдите количество натуральных чисел n, при которых число $\frac{3n+10}{2n-5}$ является натуральным числом.

№9. Вычислите: $\frac{1}{2\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 10} + \frac{1}{10\cdot 14} + \cdots + \frac{1}{46\cdot 50}$.

№10. Найдите два двузначных натуральных числа, если известно, что сумма всех остальных двузначных чисел в 50 раз больше одного из этих двух чисел.

Щеглова Н.В.

Спецкурс №9.

№1. Группа альпинистов начала движение из пункта A в пункт B вверх по горам с постоянной скоростью рано утром. Пройдя 1/3 часть расстояні между A и B, один из альпинистов вспомнил, что забыл в пункте A свою куртку и побежал обратно, увеличив скорость в 2 раза. Забрав куртку, он отправился догонять своих товарищей, уменьшив скорость на 25%, и пришел в пункт B на 1,5 часа позже всей группы. Сколько времени понадобилось его товарищам для преодоления пути из A в B?

№2. Объем треугольной пирамиды $SABC$ равен 600. На ребрах SB, BC, AB взяты соответственно точки P, M, N так, что $SP:PB = 2:3, BM:MC = 1:4, AN:NB = 5:3$. Найдите объем пирамиды $PMNB$.

№3. График квадратичной функции $y = f(x)$ пересекает ось абсцисс в точках $x = -5{,}5, x = 1{,}5$. Наибольшее значение функции равно 49. Найдите значение функции $y = -|f(x)|$ при $x = -4$.

№4. $ABCD$ – параллелограмм с вершинами $A(0{,}5; 1), B(3; 8), D(9; 1)$. Найдите ординату m точки пересечения прямой AC с осью Oy. В ответ запишите $22m$.

№5. Биссектриса AL треугольника ABC делит сторону BC на отрезки $BL = 2, LC = 5$, а длина медианы AM равна $5\sqrt{5}/2$. Найдите произведение наибольшей и наименьшей сторон треугольника.

№6. Найдите произведение меньшего корня на количество корней уравнения $\sqrt{7 - 2x - 4\sqrt{3 - 2x}} = x + 4$.

№7. На стороне AC треугольника ABC как на диаметре построена окружность с центром в точке O, пересекающая отрезок BO в точке P так, что $OP = 4, PB = 8$. Прямые AP, CP пересекают стороны BC и AB треугольника в точках K, M соответственно. Найдите значение выражения $CK^2 + AM^2 - AC^2$.

№8. Точки M, K принадлежат сторонам BC и AC треугольника ABC так, что $BM:MC = 3:5, AK:KC = 2:7$. Отрезки AM, BK пересекаются в точке O. Найдите значение выражения $21 \cdot \frac{AO}{OM}$.

№9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб с площадью поверхности 1152. Найдите расстояние между прямыми C_1D, B_1O, где O – точка пересечения диагоналей грани $ABCD$ куба.

№10. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите удвоенную площадь трапеции, если $BC:AD = 2:5$, а площадь треугольника COD равна 5.

Щеглова Н.В.

Спецкурс №10.

№1. Длины сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию, один из его углов равен 120^0, а радиус вписанной окружности равен $\sqrt{3}$. Найдите периметр этого треугольника.

№2. О трапеции $ABCD$ известно, что в нее можно вписать окружность и биссектриса угла ABC проходит через середину основания AD. Основания трапеции $AD = 12, BC = 2$. Найдите площадь трапеции и длину ее диагонали AC.

№3. Вася и Петя четыре дня собирали грибы. Каждый следующий день (начиная со второго) Петя собирал в одно и то же число раз больше грибов, чем в предыдущий. Вася же в каждый следующий день собирал на одно и то же число грибов больше, чем в предыдущий. В первый и третий день они собрали по одинаковому числу грибов. Во второй день Вася собрал на 3 гриба больше, чем Петя, а в четвертый день Петя собрал на 15 грибов больше, чем Вася. Сколько грибов собрал каждый из мальчиков за четыре дня?

№4. В треугольнике ABC известна сторона $AC = 10$, а также известно, что центр вписанной в этот треугольник окружности принадлежит медиане, проведенной из вершины C. Найдите площадь треугольника ABC и радиус вписанной в него окружности, если этот радиус составляет ¼ от стороны AB.

№5. Два пешехода вышли одновременно из пункта A. Первый из них встретился с туристом, идущим в A, через 20 минут после выхода из A, а второй встретил туриста на 5 минут позже первого. Через 10 минут после своей второй встречи турист пришел в A. Чему равно отношение скорости первого пешехода к скорости второго?

№6. Решите неравенство $\left|\frac{2x^2-6}{2x+3}+1\right| + \left|\frac{2x^2-6}{2x+3}+3\right| \leq 4$.

№7. От пристани A к пристани B, расположенной ниже по течению реки, отправился катер. Одновременно с ним из B в A вышла моторная лодка. Дойдя до B, катер тут же повернул обратно и прибыл в A одновременно с лодкой. Скорость течения реки равна 4,5 км/ч. Найдите собственную скорость катера, если известно, что она на 3 км/ч больше собственной скорости лодки.

№8. В треугольнике ABC проведены высота BH и биссектриса AL. Оказалось, что $LH \parallel AB$. Найдите сторону BC этого треугольника и радиус описанной около него окружности, если $AC = 2, AB = 6$.

№9. Два велосипедиста выехали одновременно из пункта A, первый – со скоростью 24 км/ч, а второй – со скоростью 18 км/ч. Через час вслед за ними выехал автомобиль, который обогнал второго велосипедиста на 10 минут раньше, чем первого. Найдите скорость автомобиля.

№10. Дана парабола $y = 2x^2 + bx + c$. Прямая, проходящая через начало координат, пересекает параболу в двух точках: ее вершине A и точке $B(2; 6)$. Найдите значение коэффициента c.

Щеглова Н.В.

Спецкурс №11.

№1. Четыре числа образуют геомерическую прогрессию. Известно, что если уменьшить первое из них на 2, второе – на 1, третье – на 7, а четвертое – на 27, то полученные четыре числа будут образовывать арифметическую прогрессию. Найдите исходные четыре числа.

№2. Пункты A и B, расстояние между которыми 68 км, расположены вдоль реки. Обычно катер, двигаясь против течения, добирается от A до B за 2 ч 50 минут. В один из дней ровно на половине пути от A до B у катера заглох двигатель, и, пока в течение 20 минут его ремонтировали, катер сносило течением реки в направлении к A. Сразу после починки двигателя катер увеличил свою скорость на 8 км/ч и в результате прибыл в B за обычное время. Найдите скорость течения реки.

№3. Основания трапеции $ABCD$ равны $AD = 8, BC = 6$. Окружность с центром в вершине A проходит через вершину B, через середину диагонали AC и через середину стороны AD. Найдите сторону CD и площадь трапеции.

№4. Петя и Вася пошли в лес и собрали по 54 гриба каждый. При это на двоих они собрали 72 подберезовика, все остальные собранные грибы – подосиновики. Сколько подберезовиков собрал каждый из ребят, если известно, что у Пети на каждый подосиновик проходится в 5 раз больше подберезовиков, чем у Васи?

№5. Решите неравенство $x^2 + 7x + 6 \leq \frac{144}{x^2+3x-4}$.

№6. В треугольнике ABC точка N – середина стороны AB, а точка K на стороне BC – основание биссектрисы, проведенной из вершины A. Оказалось, что $KB = KN$. Найдите длину стороны BC и радиус вписанной в треугольник ABC окружности, если известно, что $AC = 11, AB = 14$.

№7. В треугольнике ABC точки M, N – середины сторон AB и BC соответственно. T – точка пересечения медиан. Оказалось, что точки M, T, N, B лежат на одной окружности, центр которой принадлежит стороне AB. Найдите площадь треугольника ABC и радиус его описанной окружности, если $AB = 6$.

№8. Два бегуна стартовали один за другим с интервалом в 2 минуты. Второй бегун догнал первого на расстоянии 1 км от точки старта. Пробежав от точки старта 5 км, он повернул назад и встретился вскоре с первым бегуном. Эта встреча произошла через 20 минут после старта первого бегуна. Найдите скорость первого бегуна.

№9. Найдите удвоенное произведение всех различных корней уравнения $\left(\sqrt{2x-2} - \sqrt{x+3}\right)\left(\sqrt{x+3} + 3\right) = x - 5$.

№10. Найдите сумму всех различных корней уравнения
$(x^2 - x - 1)^2 + (x+2)^2 = (x^2+1)^2$.

Щеглова Н.В.

Спецкурс №12.

№1. Найдите значение выражения $5 - ctg82°30' + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6}$.

№2. Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Вслед за ним через 2 часа из пункта A выехал велосипедист, а еще через 30 минут – мотоциклист. Пешеход, велосипедист и мотоциклист двигались равномерно и без остановок. Через некоторое время после выезда мотоциклиста оказалось, что к этому моменту все трое одолели одинаковую часть пути от A до B. На сколько минут раньше пешехода в пункт B прибыл велосипедист, если пешеход прибыл в пункт B на 1 час позже мотоциклиста?

№3. Из пункта A по реке отправляется плот. Одновременно навстречу ему отправляется катер из пункта B, расположенного ниже по течению, чем пункт A. Встретив плот, катер сразу поворачивает и идет вниз по течению. Найдите, какую часть пути от A до B пройдет плот к моменту возвращения катера в пункт B, если скорость катера в стоячей воде вчетверо больше скорости течения реки.

№4. Пусть AD - медиана треугольника ABC, причем $\angle ADB = 45°$, $\angle ACB = 30°$. Найдите величину угла BAD.

№5. Известно, что в треугольнике ABC $\angle BAC = 60°, K$ - точка пересечения медианы CM и высоты BN, а отрезки $CK = 6, KM = 1$. Найдите углы этого треугольника.

№6. Решите уравнение $(x-9)(x-3)(x^2+8x+12) = 56x^2$.

№7. Найдите все пары действительных чисел, для которых выполняется равенство $\frac{x-2}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{4-y}{x} - \frac{|y-2x|}{xy}$.

№8. В треугольнике ABC угол A в два раза больше угла C, сторона BC на 2 см больше стороны AB, $AC = 5$ см. Найти AB и BC.

№9. Свежие грибы содержат по массе 90% воды, а сухие – 12%. Сколько получится сухих грибов из 22 кг свежих?

№10. Пять человек выполняют некоторое задание. Первый, второй и третий, работая вместе, могут выполнить все задание за 7,5 ч; первый, третий и пятый вместе – за 5 ч; первый, третий и четвертый вместе – за 6 часов; второй, четвертый и пятый вместе – за 4 ч. За какое время выполнят это задание все 5 человек, работая вместе?

Щеглова Н.В.

Спецкурс №13.

№1. Точки M, N, K расположены соответственно на сторонах AB, AC, BC треугольника ABC так, что $AM{:}MB = 3{:}1, AN{:}NC = 5{:}1, CK{:}KB = 3{:}5$. Отрезки AK, MN пересекаются в точке L. Найдите отношение $\frac{AL}{LK}$.

№2. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S проведена медиана BM в треугольнике SBC и даны $BC = 2\sqrt{3}, SC = \sqrt{21}$. Через середину K ребра SB проведена прямая KD, параллельная ребру AC. Через точку A проведена прямая, пересекающая прямые BM, KD в точках P, T соответственно. Найдите увеличенную в 18 раз длину отрезка PT.

№3. Найдите произведение наибольшего целого решения на количество целых решений неравенства $\frac{18}{7+|27-x|} > |27 - x|$.

№4. Первые члены арифметической и геометрической прогрессии одинаковы и равны 5, третьи члены также одинаковы, а вторые отличаются на 10. Найдите четвертый член арифметической прогрессии, если все члены обеих прогрессий положительны.

№5. Вычислите $\frac{35arccos(-cos\left(-\frac{43\pi}{6}\right))}{arcsin\left(sin\frac{16\pi}{3}\right)+arccos(cos\left(-\frac{15\pi}{8}\right))}$

№6. На складе имеются книги, которых больше 200, но меньше 400. Все книги разложены в пачки по 6 книг. Их попытались разложить в пачки по 9 штук, однако 6 книг остались лишними. Затем их попытались разложить в пачки по 7 книг, однако 4 книги остались лишними. Определите, сколько всего книг на складе.

№7. Вычислите $\frac{sin^2 184°}{4sin^2 23°\cdot sin^2 2°\cdot sin^2 44°\cdot sin^2 67°}$.

№8. В трапеции $ABCD$ основания AB, CD равны 9 и 5 соответственно, а углы при основании AB равны 67^0 и 23^0. Найдите длину отрезка T, L, где T, L – середины оснований AB, CD.

№9. В остроугольном треугольнике ABC длины медиан BM, CN, высоты AH равны соответственно 4, 5, 6. Найдите площадь треугольника ABC.

№10. Медианы AM, BN треугольника ABC пересекаются в точке O. Найдите длину стороны AB, если $BC = \sqrt{17}, AC = \sqrt{15}$, а точки M, N, C, O лежат на одной окружности.

Щеглова Н.В.

Спецкурс №14.

№1. Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Вслед за ним через 2 ч из A выехал велосипедист, а еще через 30 минут – мотоциклист. Пешеход, велосипедист и мотоциклист двигались без остановок и равномерно. Через некоторое время оказалось, что все трое преодолели одинаковую часть пути от A до B. На сколько минут раньше пешехода велосипедист прибыл в пункт B, если пешеход прибыл в B на 1 час позже мотоциклиста?

№2. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла A к гипотенузе $BC = 12$ проведена биссектриса $AK = \frac{7}{\sqrt{2}}$. Найдите радиус вписанной окружности r треугольника ABC и в ответе укажите значение $12r$.

№3. Поле разделено на три участка. За день были вспаханы половина первого и 3/4 второго участков, а третий участок, который составляет четвертую часть всего поля, был вспахан полностью. Вспаханная за день площадь поля в два раза больше площади второго участка. Какую часть поля составляет площадь, вспаханная за день?

№4. В треугольник, периметр которого равен 20, вписана окружность. Отрезок касательной, проведенной к окружности параллельно основанию, заключенный между двумя другими сторонами треугольника, равен 2,4. Найдите длину основания треугольника. Если основание может принимать несколько значений, то в ответ запишите их сумму.

№5. В треугольник периметром 50 вписана окружность. К этой окружности проведена касательная, параллельная стороне треугольника. Чему равна наибольшая возможная длина отрезка касательной, концы которой принадлежат сторонам треугольника?

№6. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} |x-y|+|x+y| \le 6, \\ |x+3|+|y| \le 3. \end{cases}$

№7. Длина стороны AB параллелограмма $ABCD$ равна длине его диагонали BD. Описанная около треугольника ABD окружность делит большую диагональ на отрезки $AM = 84, MC = 16$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

№8. Найдите $2a$, где a – сумма корней уравнения $(x-1)(2x-3) = \frac{5}{2(4x-5)^2}$.

№9. Найдите значение выражения $6sin2\alpha + 6cos4\alpha - 8cos^2(\frac{3\alpha}{2} - \frac{\pi}{8})$, если $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1}{3}$.

№10. Сумма корней уравнения $(x+9)^2 - 5x\sqrt{3x-2} = 93$ равна…

Спецкурс №15.

№1. Найти наибольшее значение функции $y = 4 - 4sinx - 3cosx$.

№2. Решите уравнение $4sin3x + \frac{1}{3}cos3x = 3$.

№3. Точки B, C движутся с одинаковой постоянной скоростью v м/с по разным сторонам угла с вершиной A так, что расстояние AB уменьшается, а расстояние AC увеличивается. В некоторый момент времени точки B, C находятся на окружности радиуса R м с центром на прямой, содержащей отрезок AC, причем прямая, содержащая отрезок AB, касается этой окружности и $AB = 3AC$. Через t секунд площадь треугольника ABC принимает наибольшее возможное значение. Найдите время t (в секундах) при условии, что каждая из точек B, C обошла бы окружность радиуса R м за 120π секунд, двигаясь со скоростью v м/с.

№4. Каждый из двух различных корней квадратного трёхчлена $x^2 + (3a - 14)x + 2b + 9$ и его значение при x, равном 2, являются простыми числами. Найдите сумму корней квадратного трёхчлена и натуральных чисел a, b.

№5. При делении натурального числа b на 25 с остатком, отличным от нуля, неполное частное равно 7. К числу b слева приписали некоторое натуральное число a. Полученное натуральное число разделили на 20 и получили 18 в остатке. Найдите число b или сумму таких чисел, если их несколько.

№6. Две машинистки должны перепечатать рукопись, состоящую из трёх глав, из которых первая глава вдвое короче второй и втрое длиннее третьей. Работая вместе, машинистки перепечатали первую главу за 3 часа 36 минут. Вторая глава была перепечатана за 8 часов, из которых 2 часа работала только первая машинистка, а остальное время они работали вместе. Сколько минут потребуется второй машинистке для того, чтобы одной перепечатать третью главу?

№7. $SABC$ – пирамида, в которой $SA = SB = SC = 6, AB = 2, BC = 3, AC = 4$. Найдите значение выражения $12\sqrt{30}cos\alpha$, где α – линейный угол двугранного угла при боковом ребре SC.

№8. О натуральных числах a, b известно, что $a > b, a + b = 48$, НОК(a, b)=238. Найдите число a.

№9. Точки $A(5; 3)$ и $D(8; 3)$ являются вершинами параллелограмма $ABCD$. Найдите абсциссу вершины C, если известно, что $AC = \sqrt{61}$, ордината вершины B равна 8, а угол BAD – острый.

№10. $ABCD$ – прямоугольник. Точки N, K – середины сторон AD и CD соответственно, O – точка пересечения отрезков AK, BN. Найдите площадь четырехугольника $OKDN$, если площадь прямоугольника $ABCD$ равна 60.

Щеглова Н.В.

Спецкурс №16.

№1. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 4. Точка K – середина ребра DD_1. Точки M, H лежат на ребрах A_1B_1, AB соответственно, причём $A_1M: MB_1 = 1: 3$, $AH: HB = 3: 1$. Найдите градусную меру угла между прямыми MH, KC_1.

№2. Найдите наибольшее отрицательное решение уравнения (в градусах)
$sin5x + cos8x = 2$.

№3. В двух ящиках находится более 29 одинаковых деталей. Число деталей в первом ящике, уменьшенное на 2, более чем в 3 раза превышает число деталей во втором ящике. Утроенное число деталей в первом ящике превышает удвоенное число деталей во втором ящике, но менее чем на 60. Найдите, сколько деталей в первом ящике.

№4. Найдите среднее арифметическое корней (в градусах) уравнения
$\left|\sqrt{\pi^2 - x^2} - 10\right| + \sqrt{2}sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{\pi^2 - x^2} = 11 - sinxcosx.$

№5. $ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма, у которой сторона основания и боковое ребро имеют длину 6. Через середины ребер AC, BB_1 и вершину A_1 призмы проведена секущая плоскость. Найдите площадь сечения призмы этой плоскостью.

№6. Найдите наибольшее значение суммы $x + y$ пары чисел, удовлетворяющих системе уравнений $\begin{cases} x^2 - |y| = 16, \\ cos\left(arccos\frac{|x|}{4}\right) + 16y = 1. \end{cases}$

№7. Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения
$\sqrt{25 + (6^x - 6)\sqrt{9 + (6^x + 7)\sqrt{16 + (6^x + 5)(6^x - 3)}}} = \frac{6^x}{2} + 17.$

№8. В ящик вложили 8 ящиков. В каждый из этих ящиков либо опять вложили 8 ящиков, либо не вложили ни одного. Данная процедура повторилась несколько раз. В результате наполненных ящиков оказалось 25. Найдите, сколько процентов составляет количество пустых ящиков от количества наполненных.

№9. В равнобедренном треугольнике ABC точка N лежит на высоте, проведенной к основанию, и делит её в отношении 1:3, считая от основания. Через вершины основания C, B и точку N проведены прямые CD, BE ($D \in AB, E \in AC$). Найдите площадь треугольника ABC, если площадь трапеции $CEDB$ равна 64.

№10. Вычислите $cos20° \cdot cos40° \cdot cos80°$.

Спецкурс №17.

№1. Найдите разность арифметической прогрессии, третий член которой равен 7, если известно, что число -5 также является одним из её членов и сумма всех предшествующих ему членов равна 57. Если значений несколько, то в ответе укажите их произведение.

№2. В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания $AD = 33, BC = 63$. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции, если известно, что отношение радиусов окружностей, вписанных в треугольники ABD, ABC, равно 2 : 3.

№3. Длины сторон AB, AC, BC треугольника ABC, периметр которого равен 6, в указанном порядке являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии. Найдите её разность, если известно, что угол BAC в два раза больше угла ABC.

№4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Найдите её диаметр, если известно, что $AB = 5, BD = 13, AC = CD = 15$.

№5. При каких значениях b многочлены $P(x) = 2x^2 + bx + 1$ и
$Q(x) = x^2 + (4b - 15)x + 2$ имеют общий корень?

№6. Каким количеством нулей заканчивается произведение всех натуральных чисел от 1 до 2021 включительно?

№7. Определите все целые числа $a; b$, для которых один из корней уравнения $3x^3 + ax^2 + bx + 12 = 0$ равен $1 + \sqrt{3}$. В ответе укажите наименьшее значение выражения $\frac{a+b}{3}$.

№8. Найдите значение выражения $\frac{x_0^2+21x_0-18}{\sin(-\frac{2021\pi}{2})}$, если x_0 – корень уравнения $\sqrt{2x^2 - 4x + 3} + \sqrt{3x^2 - 6x + 7} = 2 + 2x - x^2$.

№9. Два судна двигаются прямолинейно и равномерно в один и тот же порт. В начальный момент положение судов и порта образуют равносторонний треугольник. После того, как второе судно прошло 80 км, указанный треугольник становится прямоугольным. В момент прибытия первого судна в порт второму останется пройти 120 км. Найдите расстояние между судами в начальный момент времени.

№10. Из города A в город B, расстояние между которыми 200 км, мотоциклист ехал 6 часов. Сначала он двигался со скоростью ϑ_1, превышающей 15 км/ч, а потом со скоростью ϑ_2, причём время движения с каждой скоростью пропорционально этой скорости. Через 4 часа после выезда мотоциклист был в 120 км от города A. Определите $\vartheta_1 + \vartheta_2$.

Щеглова Н.В.

Спецкурс №18.

№1. Вычислите $2 \cdot (a^4 + b^4 + c^4)$, зная, что $a + b + c = 0, a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

№2. Произведение корней уравнения $x^4 + x^3 - 1 = 0$ равно:

1) $\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$; 2) $\frac{1}{1-\sqrt{2}}$; 3) 1; 4) $-1-\sqrt{2}$; 5) $2\sqrt{2}-1$.

№3. Найдите значение выражения $\sqrt{\frac{\sqrt{x_0}+2004x_0-2}{sin\frac{\pi x_0}{21\sqrt{3}}-2}}$, где x_0 – меньший корень уравнения $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}} + \sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}} = 4$.

№4. Решите систему $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ xy + xz + yz = -4, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1. \end{cases}$ В ответе укажите произведение всех найденных x, y, z.

№5. Пусть $(x; y)$ – решение системы $\begin{cases} (13x^4y^2 - 6x^2 - 6y)x\sqrt{y} = 356, \\ (5x^4y^2 - 6x^2 - 6y)x\sqrt{y} = 100. \end{cases}$

Найдите произведение всех таких значений y.

№6. Сосуд заполняется через несколько одинаковых кранов, которые открываются один за другим через равные промежутки времени. Через 8 часов после того, как был включён последний кран, сосуд был заполнен. Время, в течение которого были открыты первый и последний краны, относится как 5:1. Через сколько времени заполнится сосуд, если открыть все краны одновременно?

№7. Найдите большее произведение четырёх чисел, из которых первых три составляют геометрическую прогрессию, а последние три – арифметическую прогрессию. Известно, что сумма крайних чисел равна 14, а сумма средних чисел равна 12.

№8. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 5, BC = \sqrt{17}, AC = 4$ на стороне AC взята точка M так, что $CM = 1$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABC и BCM.

№9. В трапеции диагонали равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2. Найдите площадь трапеции.

№10. Высота, биссектриса и медиана, проведенные из одной вершины треугольника, делят угол при этой вершине на четыре равные части. Найдите наибольший угол треугольника.

Щеглова Н.В.

Спецкурс №19.

№1. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, которые при делении на 4 дают в остатке 1, а при делении на 6 и на 9 дают в остатке 3.

№2. Найдите значение выражения $\frac{2sin^2 96°}{sin^2 12°\cdot sin^2 42°\cdot sin^2 66°\cdot sin^2 78°}$.

№3. Из двух растворов с различным процентным содержанием спирта массой 200 г и 600 г отлили по одинаковому количеству раствора. Каждый из отлитых растворов долили в остаток другого раствора, после чего процентное содержание спирта в обоих растворах стало одинаковым. Найдите, сколько раствора (в граммах) было отлито из каждого раствора.

№4. Найдите произведение корней уравнения $x-\sqrt{x^2-121}=\frac{(x-11)^2}{2x+22}$.

№5. Решите уравнение $\frac{28x^2}{x^4+49}=x^2+2\sqrt{7}x+9$.

В ответ запишите значение выражения $x\cdot|x|$, где x – корень уравнения.

№6. Из точки A проведены к окружности радиусом 4 касательная AB (B – точка касания) и секущая, проходящая через центр окружности и пересекающая её в точках D, C $(AD<AC)$. Найдите площадь S треугольника ABC, если длина отрезка AC в 3 раза больше длины отрезка касательной. В ответ запишите значение выражения $5S$.

№7. Двое рабочих различной квалификации выполнили некоторую работу, причём первый проработал 4 часа, а затем к нему присоединился второй. Если бы сначала второй рабочий работал 4 часа, а затем к нему присоединился первый, то работа была бы закончена на 48 минут позже. Известно, что первый рабочий восьмую часть работы выполняет на 3 часа быстрее, чем второй рабочий выполняет шестую часть работы. Сколько минут заняло выполнение всей работы?

№8. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, длина гипотенузы которого равна 6, острый угол равен 60^0. Каждая боковая грань пирамиды наклонена к плоскости основания под углом, равным $arccos\frac{3\sqrt{3}}{14}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

№9. Функция $y=f(x)$ определена на множестве действительных чисел, является нечётной, периодической с периодом $T=26$ и при $x\in[0;13]$ задаётся формулой $f(x)=3x^2-39x$. Найдите произведение абсцисс точек пересечения прямой $y=36$ и графика функции $y=f(x)$ на промежутке $[-33;15]$.

№10. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BE, CD. Найдите длину BC, если $ED=12$ и радиус окружности, описанной около AED, равен 10.

Щеглова Н.В.

Спецкурс №20.

№1. Найдите значение выражения $A = \frac{2sin10° + sin50°}{2sin80° - \sqrt{3}sin50°}$. В ответе укажите $\frac{\sqrt{3}}{3}A$.

№2. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x^2 - xy - 3y^2 + x + y = 6, \\ 2x^2 - 5xy + 3y^2 + x - y = 2. \end{cases}$ В ответе укажите произведение всех значений переменных x и y, входящих в решение.

№3. Даны две арифметические прогрессии: 1, 4, 7, …, 2002, 2005 и 1, 6, 11, 16, …, 2001, 2006. Найдите удвоенное частное суммы всех общих членов на их количество.

№4. В трапеции $ABCD$ точка M лежит на боковой стороне AB, O – пересечение диагонали BD и отрезка CM. Найдите площадь треугольника COD, если $AM = MB, CO = 4 \cdot OM$, а площадь треугольника BOM равна 1.

№5. Каждый из рабочих должен был изготовить 36 одинаковых деталей. Первый приступил к выполнению своего задания на 4 минуты позже второго, но 1/3 задания они выполнили одновременно. Полностью выполнив своё задание, первый рабочий после двухминутного перерыва приступил к работе и к моменту выполнения задания вторым рабочим изготовил ещё 2 детали. Сколько деталей в час изготавливал рабочий с меньшей производительностью?

№6. Трое рабочих должны изготовить некоторое количество деталей. Сначала к работе приступил только один рабочий, а через некоторое время к нему присоединился второй. Когда 1/6 часть всех деталей была изготовлена, к работе присоединился третий рабочий. Работу они закончили одновременно, причём каждый изготовил одинаковое количество деталей. Сколько времени работал второй рабочий, если известно, что он работал на два часа больше третьего и что первый и второй, работая вместе, могли бы изготовить всё требуемое количество деталей на 9 часов раньше, чем это сделал бы третий, работая отдельно?

№7. На сторонах MN, NP прямоугольника $MNPQ$ взяты точки A, B соответственно так, что $AM{:}NA = 2{:}3, BN{:}BP = 1{:}3$. Отрезки BM, AQ пересекаются в точке O. Найдите площадь прямоугольника $MNPQ$, если площадь четырёхугольника $ANBO$ равна 47.

№8. Из вершины тупого угла A треугольника ABC опущена высота AD. Через точки D, A проведена окружность с диаметром равным AD, пересекающая стороны треугольника AB, AC в точках M, N соответственно. Вычислите длину стороны AC, если заданы длины отрезков $AB = 12, AM = 4, AN = 6$.

№9. Вычислите значение выражения $8 \cdot (sin^4 \frac{\pi}{16} + sin^4 \frac{3\pi}{16} + sin^4 \frac{5\pi}{16} + sin^4 \frac{7\pi}{16})$.

№10. Найдите площадь (S) трапеции $ABCD$, если основания $AD = 6, BC = 3$, а окружность с центром в точке A проходит через вершины B, D и середину CD. В ответе укажите $\frac{8S}{\sqrt{15}}$.

Спецкурс №21.

№1. Сечением куба плоскостью является правильный шестиугольник, площадь которого равна $6\sqrt{3}$. Найдите площадь полной поверхности куба.

№2. В прямоугольном треугольнике ABC (угол B – прямой) отрезок BD – высота, проведенная к стороне AC, $AD:DC = 9:16, BD = 12\sqrt{2}$. Прямая a, параллельная высоте BD, делит треугольник ABC на две равновеликие части. Найдите квадрат длины отрезка прямой a, заключенного между сторонами треугольника ABC.

№3. На сторонах AD, CD параллелограмма $ABCD$ взяты точки N, K соответственно так, что $AN:ND = 1:4, DK:KC = 2:3$. Отрезки AK, BN пересекаются в точке O. Найдите площадь четырехугольника $OKDN$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 540.

№4. Два одинаковых шара радиуса $\sqrt{15}$ и два одинаковых шара меньшего радиуса расположены на плоскости так, что каждый шар касается трёх других. Найдите площадь поверхности S одного шара меньшего радиуса и в ответ запишите значение выражения $\frac{(7+4\sqrt{3})\cdot S}{\pi}$.

№5. Внутри треугольника ABC $(AC = BC)$ отмечена точка K так, что $\angle ABK = 30°, \angle KAB = 10°, \angle ACB = 80°$. Найдите градусную меру угла AKC.

№6. Решите в действительных числах систему уравнений $\begin{cases}(x+y)(x^2+y^2) = 15,\\ (y+z)(y^2+z^2) = 65,\\ (z+x)(z^2+x^2) = 40.\end{cases}$
В ответе укажите наибольшее значение суммы решений $x + y + z$.

№7. Решите уравнение $\frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{4(y-1)\cdot\sqrt[3]{y-1}+4}{\sqrt[3]{(y-1)^2}} = 10$. В ответе укажите сумму всех найденных значений x и y.

№8. Найдите сумму нулей функции $y = (x-3)^4 + (x-2)^4 - (2x-5)^4$.

№9. Найдите сумму всех корней (корень, если он один) уравнения $\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\sqrt{1-4x^2}} + \sqrt{2}\right) = 3\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x} - x$.

№10. Из пункта A в пункт B навстречу друг другу одновременно вышли два поезда и встретились не больше, чем через 2 часа. Если бы первый поезд увеличил скорость в 1,5 раза, а второй на 30 км/ч, то к моменту встречи второй поезд прошел бы не меньше половины пути. При каком максимальном расстоянии (в км) между A и B скорость второго поезда может быть не больше скорости первого?

Щеглова Н.В.

Спецкурс №22.

№1. Найдите количество корней уравнения

$9\cdot 9^{sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)}+9^{cos^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)}=9\cdot(12-|x+5|-|x-5|)$.

№2. Из пункта A в пункт B одновременно выехали автомобиль и мотоцикл. В тот момент, когда мотоцикл преодолел половину пути, из пункта A в пункт B выехал велосипедист. К моменту прибытия автомобиля в пункт B велосипедист преодолел $\frac{1}{24}$ часть пути. Найдите скорость автомобиля, если скорость мотоцикла в 4 раза больше скорости велосипедиста и на 24 км/ч меньше скорости автомобиля.

№3. В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC, стороны которого равны $AB=17, BC=30, AC=17$. В треугольнике ABC проведена биссектриса AA_1, медиана CC_1 и высота BB_1. Найдите объём пирамиды $SA_1B_1C_1$, если высота пирамиды $SABC$ равна 12.

№4. Все рёбра тетраэдра $SABC$ равны $12\sqrt{2}$.
Известно, что $SM:MA=1:3, SP:PC=2:1, SN:NB=5:1$. Найдите объём пирамиды $SMNP$.

№5. Функция $y=f(x)$ – периодическая функция, которая определена на множестве всех действительных чисел. Известно, что наименьший положительный период функции равен 3, а на промежутке $[-3;0)$ она совпадает с функцией $y=4x+5$.
Найдите значение выражения $f(2019)\cdot f(2020)+f(2021)\cdot f(2022)$.

№6. В тетраэдре $DABC$ длины рёбер $AD=BC=2\sqrt{41}, DC=AB=2\sqrt{52}$, $AC=DB=2\sqrt{61}$. Найдите объём тетраэдра $DABC$.

№7. Найдите корень (или произведение корней, если их несколько) уравнения

$$\sqrt{12}\cos\left(\frac{\pi}{8}\sqrt{x}\sqrt{\frac{4}{x}+3-x}\right)+\sqrt{12}\sin\left(\frac{\pi}{8}x\sqrt{\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x}-1}\right)=2\sqrt{6}.$$

№8. В шоколадном наборе не более 30 плиток шоколада, причём три четверти плиток – «горький» шоколад. Когда из набора достали 4 плитки, то оказалось, что 80% оставшихся плиток шоколада составляли плитки «горького» шоколада. Сколько всего плиток шоколада содержал шоколадный набор?

№9. Если $a; b$ – корни уравнения $x^2-x-750=0$, то значение выражения $2a^2+4ab+b^2-a-151$ равно…

№10. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases}|x-y|+|x+y|\le 6,\\ |x+3|+|y|\le 3.\end{cases}$

Щеглова Н.В.

Спецкурс №23.

№1. Квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 - bx + c$ с натуральными коэффициентами a, b, c имеет два различных целых корня. Известно, что $f(1) = p$ – простое число. Найдите все возможные значения суммы $f(p) + f(p + 2)$.

№2. Три пункта A, B, C соединены прямолинейными дорогами и не лежат на одной прямой. К отрезку дороги AB примыкает квадратное поле со стороной, равной $\frac{1}{2}AB$, к отрезку BC – квадратное поле со стороной, равной BC, а к отрезку AC – прямоугольный участок леса длиной, равной AC, и шириной 4 км. Площадь леса на 20 км^2 больше суммы площадей квадратных полей. Найдите площадь леса.

№3. В треугольнике ABC угол A равен $arccos\frac{7}{8}$, $BC = 8$, а высота, опущенная из вершины A, равна сумме других высот. Найдите площадь (S) треугольника ABC и в ответе укажите значение $\frac{\sqrt{15}}{2}S$.

№4. Три шара радиусом 12 лежат на плоскости и касаются друг друга. Найдите радиус шара, касающегося трёх данных шаров и плоскости.

№5. Пусть m, n – натуральные числа, причем $\frac{m}{n}$ – правильная несократимая дробь. На какие натуральные числа можно сократить дробь $\frac{2n-m}{3n+2m}$, если известно, что она сократима? В ответе укажите сумму найденных значений.

№6. В треугольной пирамиде $PABC$ боковое ребро PB перпендикулярно к плоскости основания ABC и его длина равна 6. Длины рёбер AB и BC равны $\sqrt{15}$, а длина ребра AC равна $2\sqrt{3}$. Сфера, центр O которой лежит на грани ABP, касается плоскостей остальных граней пирамиды. Найдите расстояние (l) от центра O сферы до ребра AC. В ответе укажите величину $\frac{(6+\sqrt{15})l}{12}$.

№7. Решите уравнение $\frac{3sin4x+2sin2x}{3cos4x2cos2x+3} + 2tgx = 0$. В ответе укажите сумму корней (в градусах) на отрезке $[-230°; 392°]$.

№8. Решите систему уравнений $\begin{cases} (x+3)^3 = 3 - 2y, \\ z^2 + 4y^2 = 8y, \\ (2z - x)(x + 3) = 5x + 16 \end{cases}$ при $z \geq 0$.

В ответе укажите сумму найденных значений.

№9. Длины боковых сторон трапеции 3 и 5. Её средняя линия делит трапецию на части, отношение площадей которых равно 5/11. Найдите длину высоты трапеции (h), если в неё можно вписать окружность. В ответе укажите $6\sqrt{14}h$.

№10. Уравнение $x^2 + 6x + k = 0$ имеет корни x_1, x_2, а уравнение $2x^2 + 3x + m = 0$ – корни x_3, x_4. Определите k, m, если известно, что x_1, x_2, x_3, x_4 – последовательные члены убывающей геометрической прогрессии.

№1. В треугольной пирамиде $PABC$ боковое ребро PB перпендикулярно к плоскости основания ABC и его длина равна 6. Длины рёбер AB и BC равны $\sqrt{15}$, а длина ребра AC равна $2\sqrt{3}$. Сфера, центр O которой лежит на грани ABP, касается плоскостей остальных граней пирамиды. Найдите расстояние (l) от центра O сферы до ребра AC. В ответе укажите величину $\frac{(6+\sqrt{15})l}{12}$.

№2. Найдите сумму корней (в градусах) уравнения, принадлежащих отрезку $[-2\pi; 2\pi]$: $\left(sin\frac{\pi-2x}{2} - sin(x-\pi)\right)^2 + 1 = 2sin^2x \cdot \left(\frac{1}{cos^2\frac{3\pi-2x}{2}} - 1\right)$.

№3. Туристическая фирма за 18300$ выкупила все билеты на один из рейсов самолета. Предполагалось, что все места в самолете будут заняты. Но в последний момент 4 туриста отказались от путешествия. Поэтому, чтобы покрыть расходы туристической фирмы, каждому пассажиру пришлось доплатить за перелёт сумму больше 12$, но меньше 12,2$. Сколько туристов было на борту самолета?

№4. В равнобедренном треугольнике центр вписанной в треугольник окружности делит высоту, проведенную к основанию треугольника, в отношении $\sqrt{5}:1$, считая от вершины треугольника. Найдите площадь треугольника, если основание треугольника равно 24.

№5. Для распечатки технической документации в учреждении имеется три принтера. Первому принтеру для распечатки всей документации потребуется времени в 3 раза меньше, чем второму, и на 12 ч больше, чем третьему. При одновременной работе трёх принтеров распечатка документации заняла бы 3 ч, но по условиям эксплуатации одновременно могут работать только два принтера. Определите минимальное время (в минутах) распечатки всей документации.

№6. Основанием пирамиды служит трапеция, в которой боковые стороны и меньшее основание равны $6\sqrt{3}$. Боковая сторона трапеции образует с основанием угол 60^0. Найдите объем пирамиды, если каждое ребро пирамиды образует с плоскостью основания угол 45^0.

№7. Расстояние от вершины прямого угла до центра вписанной в прямоугольный треугольник окружности равно $12\sqrt{2}$, а расстояние до центра описанной окружности равно 29. Найдите периметр треугольника.

№8. Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения

$$\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x+10+5\sqrt{2x-5}} = 9\sqrt{2}.$$

№9. Объём добычи минеральных солей на трёх шахтах относится как 5:12:18. Планируется уменьшить годовую добычу минеральных солей на первой шахте на 5,5%, на второй шахте – на $\frac{1}{96}$. На сколько процентов необходимо увеличить добычу минеральных солей на третьей шахте, чтобы общий объем добычи минеральных солей увеличился на 4%?

№10. Процентное содержание серебра в трёх слитках образует геометрическую прогрессию. Если сплавить части первого, второго и третьего слитков в весовом отношении 4:5:3, образуется сплав, процентное содержание серебра в котором равно 65%. Если сплавить части тех же слитков в весовом отношении 2:7:3, то процентное содержание серебра в этом слитке будет равно 60%. Какое наименьшее процентное содержание серебра в слитках?

Спецкурс №25.

Щеглова Н.В.

№1. Внутри параллелограмма расположены две одинаковые окружности радиусом 6, каждая из которых касается боковой стороны параллелограмма, обоих оснований и второй окружности. Боковая сторона делится точкой касания в отношении 9 : 4. Найдите площадь параллелограмма.

№2. Прямоугольный треугольник, длина гипотенузы которого равна 5, высота, проведенная к ней равна 2, вращается вокруг прямой, перпендикулярной гипотенузе и проходящей в плоскости треугольника через вершину большего острого угла. Найдите объем V тела вращения и в ответ запишите значение выражение деленное на π.

№3. В прямоугольный треугольник AOB, катеты которого OA и OB $(OA > OB)$ лежат соответственно на координатных осях Ox и Oy, вписана окружность радиуса 10. Найдите сумму координат точки касания окружности и гипотенузы AB, если треугольник AOB лежит в первой четверти координатной плоскости и его площадь равна 600.

№4. Если $cos(\alpha + 24°) = \frac{7\sqrt{2}}{10}$, $0° < \alpha + 24° < 90°$, то значение выражения $30cos(\alpha + 69°)$равно…

№5. Точка A движется по периметру треугольника KMP. Точки K_1, M_1, P_1 лежат на медианах треугольника KMP и делят их в отношении $10:3$, считая от вершин. По периметру треугольника $K_1M_1P_1$ движется точка B со скоростью, в шесть раз большей, чем скорость точки A. Сколько раз точка B обойдет по периметру треугольник $K_1M_1P_1$ за то время, за которое точка A два раза обойдет по периметру треугольник KMP?

№6. От пристани A одновременно отправились вниз по течению катер и плот. Катер спустился вниз на 96 км, потом повернул обратно и вернулся в A через 14 часов. Найти скорость катера в стоячей воде, если известно, что катер встретил плот на обратном пути на расстоянии 24 км от A.

№7. Найдите количество корней уравнения $\sin(x - 2) = sinx - sin2$ на промежутке $[0; 2\pi]$.

№8. Первый член арифметической прогрессии в 2 раза больше первого члена геометрической прогрессии и в 5 раз больше второго члена геометрической прогрессии. Четвертый член арифметической прогрессии составляет 50% от ее второго члена. Найдите первый член арифметической прогрессии, если известно, что второй ее член больше третьего члена геометрической прогрессии на 36.

№9. В первый день Андрей собрал на 25% грибов меньше, чем Борис, а во второй день – на 20% больше, чем Борис. За два дня Андрей собрал грибов на 10% больше, чем Борис. Какое наименьшее количество грибов они могли собрать вместе?

№10. Решите уравнение $\sqrt{3x^2 - 5x + 7} + \sqrt{3x^2 - 7x + 2} = 3$.

Щеглова Н.В.

Спецкурс №26.

№1. Вычислите значение выражения $A = tg9° - tg27° - tg63° + tg81°$.

№2. Найдите произведение наименьшего решения и количества целых решений неравенства $\left|cos\frac{\pi x}{8}\right|^{\sqrt{x+10}\cdot log_{\left|sin\frac{\pi x}{8}\right|}\left(\frac{49-7x-x^2}{31}\right)} \geq 1$.

№3. Отрезок CD – общая хорда двух окружностей. Хорда BD первой окружности лежит на касательной ко второй окружности, а хорда AC второй окружности лежит на касательной к первой окружности. Найдите длину хорды DC, если $BC = 8, AD = 18$.

№4. Коля, Петя, Миша и Ваня ловили рыбу. Оказалось, что количество рыб, пойманных колей, Петей и Мишей, образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Если бы Коля поймал на 2 рыбы меньше, а Ваня – на 12 меньше, чем на самом деле, то количества рыб, пойманных Колей, Петей, Мишей и Ваней, образовали бы в указанном порядке арифметическую прогрессию. Сколько рыб поймал Миша, если известно, что он поймал на 18 рыб меньше Вани?

№5. Трава на лугу растёт одинаково густо и быстро. 70 коров могут съесть её за 24 дня, а 30 коров – за 60 дней. Сколько коров съели бы всю траву за 96 дней?

№6. Найдите сумму различных корней уравнения
$x = (\sqrt{x+4} + x^2 + x - 4)(2 + \sqrt{x+4})$.

№7. Отрезок AB является диаметром окружности, а точка C лежит вне этой окружности. Отрезки AC, BC пересекаются с окружностью в точках D, M соответственно. Найдите косинус угла ACB, если площади треугольников DCM, ACB относятся как 1 : 4. В ответ запишите величину $10cos\angle ACB$.

№8. Чему равно максимально возможное значение величины $4x + 3y$, если x, y удовлетворяют уравнению $\sqrt{x^2 + (y-10)^2} + \sqrt{(x-6)^2 + (y-2)^2} = 10$?

№9. Решите уравнение $f\big(g(x)\big) + g\big(f(x) + 4\big) = 2010$, если известно, что
$f(x) = 4x^2 + 3x + 5$ и $g(x) = \begin{cases} 2^{log_2 2005}, & x \geq 8; \\ \frac{5}{x-8} - 2^x, & x < 8. \end{cases}$

№10. Известно, что точки K, L лежат соответственно на сторонах AB, BC треугольника ABC, а O – точка пересечения AL, CK. Известно, что площади треугольников AOK, COL равны соответственно 1 и 8, а треугольник AOC и четырехугольник $BKOL$ равновелики. Найдите площадь треугольника ABC.

Щеглова Н.В.

Спецкурс №27.

№1. В равнобедренном остроугольном треугольнике ABC основание $AC = 24$, а расстояние от вершины B до точки M пересечения высот равно 7. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

№2. Известно, что числа $x; y$ удовлетворяют условию $\frac{x}{2y} + \frac{9y}{2x} + \frac{18xy}{x^2+9y^2} = 6$. Найдите наименьшее значение выражения $A = (x-7)^2 + 3xy$. В ответе укажите $2A$.

№3. Точка K – середина стороны AD прямоугольника $ABCD$. Найдите угол между BK и диагональю AC, если известно, что $AD: AB = \sqrt{2}$.

№4. Найдите значение выражения $xy + yz + xz$, если $x = tg10°, y = tg25°, z = tg55°$.

№5. Решите систему уравнений $\begin{cases} 8x^3z - y^3z = 4y^2 - x^2, \\ 9xz - 5y = \frac{30}{xyz}, \\ 2x - y = \frac{1}{2}. \end{cases}$

В ответе укажите произведение всех найденных значений x, y, z.

№6. В треугольнике ABC $AB = 13, BC = 14, AC = 15$. Найдите расстояние d между центрами вписанной и описанной окружностей. В ответе укажите $\frac{16d}{\sqrt{65}}$.

№7. В прямоугольном треугольнике катеты равны 12 и 5. Найдите расстояние между точкой пересечения медиан и точкой пересечения биссектрис.

№8. Две окружности радиусов $\sqrt{2}$ и 1 пересекаются в точке A. Расстояние между центрами окружностей равно 2. Хорда AC большей окружности пересекает меньшую окружность в точке B и делится этой точкой пополам. Найдите длину хорды AC.

№9. В трёх растворах массовые доли спирта образуют геометрическую прогрессию. Если смешать первый, второй и третий растворы в массовом отношении 2 : 3 : 4, то получится раствор, содержащий 32% спирта, если же смешать их в массовом отношении 3 : 2 : 1, то получится раствор, содержащий 22% спирта. Какова массовая доля спирта в третьем растворе?

№10. Найдите количество корней уравнения $x^2 + 2x sin\frac{3\pi x}{2} + 1 = 0$ на отрезке $[-2\pi; 4\pi]$.

Щеглова Н.В.

Спецкурс №28.

№1. Точки P, T, M принадлежат сторонам AB, BC, AC треугольника ABC так, что $AP : PB = 3 : 2, BT : TC = 1 : 3, AM : MC = 5 : 3$. Отрезки MP, PC пересекаются в точке O. Найдите значение выражения $15 \cdot \frac{PO}{OC}$.

№2. В буфете продавались пирожки за 50 копеек, бублики за 60 коп., булки за 70 коп., слойки за 80 коп. и коржики за 1 рубль. Группа ребят купила на 10 рублей 14 изделий разных наименований. Сумма цен купленных изделий равна 2 рубля 10 копеек. Сколько каких изделий купили ребята, если известно, что не было куплено больше 7 изделий одного наименования и равного количества изделий разных наименований?

№3. Число двухкомнатных квартир в доме в 4 раза больше числа однокомнатных, а число трёхкомнатных квартир кратно числу однокомнатных. Если число трёхкомнатных квартир увеличить в 5 раз, то их станет на 22 больше, чем двухкомнатных. Сколько всего квартир в доме, если известно, что их не меньше 100?

№4. Из колбы, в которой имеется 80 г 10%-го раствора поваренной соли, отливают некоторую часть раствора в пробирку и выпаривают до тех пор, пока процентное содержание соли в пробирке не повысится втрое. После этого выпаренный раствор выливают обратно в колбу. В результате содержание соли в колбе повышается на 2%. Какое количество раствора отлили из колбы в пробирку?

№5. Вычислите $3tg\frac{\alpha}{2}$, если $sin\alpha + cos\alpha = 1{,}4, 0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

№6. Решите уравнение $(4 - cos2x)(2 + 3siny) = 12 + 13cos^{-2}3z$.

№7. Разность $\sqrt{|40\sqrt{2} - 57|} - \sqrt{|40\sqrt{2} + 57|}$ является целым числом. Найдите это целое число.

№8. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0, \\ 2x^2 - 4x + 3 + y^3 = 0. \end{cases}$

№9. Натуральные числа a, b, c, взятые в указанном порядке, образуют возрастающую геометрическую прогрессию, знаменатель которой является целым числом. Числа 2240 и 4312 делятся на b, c соответственно. Найдите числа a, b, c, если известно, что при указанных условиях сумма $a + b + c$ максимальна.

№10*. Встречаются два математика. Один из них говорит: «У меня есть три сына и произведение их возрастов равно 36. Сколько им лет?» Второй математик не смог ответить на этот вопрос. Тогда первый сказал, что сумма возрастов его сыновей равна числу окон в доме напротив. И снова второй не смог ответить. Тогда первый сказал, что его старший сын рыжий. Тут второй математик сразу все понял. Сколько лет сыновьям первого математика?

Щеглова Н.В.

Спецкурс №29.

№1. На крыше здания сидели вороны. Когда пришёл хулиган Вася и пальнул в них из рогатки, 75% ворон улетели; вместо них на крышу прилетело 80 других ворон. Тогда хулиган Вася пальнул в них ещё раз, и тогда 80% ворон улетело, а взамен прилетело 75 других ворон. В результате ворон на крыше оказалось меньше, чем до начала хулиганских действий Васи. Какое наименьшее число ворон могло сидеть на крыше до Васиного прихода?

№2. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист, а ещё через 15 минут вслед за ним выехал второй велосипедист. Через 27 минут после выезда второго велосипедиста из пункта B в пункт A выехал мотоциклист. Все трое участников движения встретились ровно посередине между пунктами A и B. Мотоциклист, доехав до A, и второй велосипедист, доехав до B, развернулись, поехали в обратном направлении и снова одновременно встретились с первым велосипедистом. За сколько минут мотоциклист проехал расстояние от B до A?

№3. Решите систему $\begin{cases} (2-x)(3x-2z)=3-z, \\ y^3+3y^2=x^2-3x+2, \\ z^2+y^2=6y, \\ z \geq 0. \end{cases}$

№4. В треугольнике ABC точка T – основание биссектрисы, проведенной из вершины C. Найдите градусную меру угла ACB, если $\frac{1}{AC}+\frac{1}{BC}=\frac{1}{CT}$.

№5. Объем правильной треугольной пирамиды составляет 1/6 куба бокового ребра. Найдите градусную меру плоского угла при вершине этой пирамиды.

№6. Группу людей попытались построить в колонну по 8 человек в ряд, но один ряд оказался неполным. Тогда ту же группу людей построили по 7 человек в ряд, все ряды оказались полными, а число рядов оказалось на 2 больше. Если бы это же количество людей попытались построить по 5 человек в ряд, то рядов было бы еще на 7 больше, причём один ряд был бы неполным. Сколько людей было в группе?

№7. Известно, что $tg(15°+\alpha)=0{,}5$. Найдите $tg(60°+\alpha)$.

№8. В треугольнике ABC проведена медиана AA_1. Через точку C проведён отрезок EK, равный AA_1 и параллельный ему. Найдите площадь четырёхугольника $AEKA_1$, если площадь треугольника ABC равна 111.

№9. Два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ расположены так, что B – середина отрезка AB_1, C – середина отрезка BC_1, A – середина отрезка CA_1. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь $A_1B_1C_1$ равна 42.

№10. Решите уравнение $\left|\frac{1-x^2}{x}\right|+\left|\frac{x^2+3x+2}{x+1}\right|=\frac{1}{x}+2$ и укажите в ответе сумму всех найденных целочисленных x.

Щеглова Н.В.

Спецкурс №30.

№1. Найдите больший корень уравнения $cos\left(\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+log_6(x^2+9)-log_6 x=0$.

№2. Составьте приведенное квадратное уравнение с рациональными коэффициентами и иррациональными корнями x_1, x_2, чтобы выполнялось условие $x_1+x_2^2=2$. В ответе укажите утроенную сумму его коэффициентов.

№3. Решите неравенство $\frac{\sqrt{x+2+\sqrt{5x-9}}-\sqrt{x+2+\sqrt{4x-15}}}{\sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}}-\sqrt{x+14-8\sqrt{x-2}}}\le 0$ и укажите наибольшее целое решение.

№4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Объём треугольной пирамиды B_1AD_1C равен 576. Найдите квадрат расстояния от точки B_1 до плоскости AD_1C.

№5. Отрезок MC перпендикулярен плоскости ромба $ABCD$, угол CBA равен 120^0. Угол между прямой MA и плоскостью, в которой лежит ромб, равен 30^0. Найдите значение выражения $\frac{15}{sin^2\alpha}$, где α – угол между прямой MA и плоскостью MCD.

№6. Из двух сосудов A и B, в которых находятся растворы с различным процентным содержанием одной и той же соли, отлили соответственно в пустые пробирки C и D по n граммов растворов. Затем раствор из пробирки C вылили в сосуд B, а раствор из пробирки D – в сосуд A. После этого процентное содержание соли в полученных растворах в сосудах A и B стало одинаковым. Найдите n (в граммах), если в сосуде A было 280 г раствора, а в сосуде B – 70 г.

№7. В остроугольном треугольнике ABC на высоте AD взята точка M, а на высоте BP – точка N так, что углы BMC, ANC – прямые. Расстояние между точками M и N равно $4+2\sqrt{3}$, угол MCN равен 30^0. Найдите биссектрису CL треугольника CMN. В ответе укажите $\frac{3CL}{7+4\sqrt{3}}$.

№8. $ABCA_1B_1C_1$ – прямая треугольная призма, у которой $AB=BC=BB_1=8\sqrt{2}$ и в основании лежит прямоугольный треугольник ABC (угол ABC – прямой). Найдите значение выражения S^2, где S – площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины ребер BC, BB_1, A_1B_1.

№9. Решите неравенство $(x+\frac{6}{x})(\frac{\sqrt{x^2-12x+36}-2}{\sqrt{12-x}-2})^2\ge 7\cdot(\frac{\sqrt{x^2-12x+36}-2}{\sqrt{12-x}-2})^2$. В ответ запишите сумму всех целых решений неравенства.

№10. Найдите x_0 – наибольший корень уравнения $sin^6(\pi x)+cos^6(\pi x)=\frac{-10x}{25+16x^2}$ и укажите в ответе $24x_0$.

Щеглова Н.В.

Спецкурс №31.

№1. Найдите квадрат выражения $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

№2. Найдите все пары $(a;b)$ натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению $15a^2+b^2-8ab+8a-2b+38=0$.

№3. Окружность, построенная на стороне AB треугольника ABC как на диаметре, пересекает высоту, опущенную из вершины C, в её середине. Найдите AB, если $BC=2, AC=\sqrt{3}$.

№4. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка K так, что $AK=3KB$. На стороне BC отмечена точка M такая, что $\angle BKM=2\angle BAC$ и $KM=MC=BK$. Найдите величины углов треугольника ABC.

№5. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена высота CH. Пусть точки K, N – основания биссектрис AK, CN углов CAH, BCH образовавшихся треугольников CAH, BCH соответственно. Найдите длину отрезка KN, если $CK=9$.

№6. Однажды Дядя Фёдор, кот Матроскин и Шарик пошли на рыбалку. Улов оказался большим. Дядя Фёдор поймал половину от общего улова без $\frac{2}{5}$ того, что поймали вместе кот Матроскин и Шарик. Кот Матроскин поймал треть от общего улова и $\frac{1}{5}$ того, что поймали вместе Дядя Фёдор и Шарик. Улов Шарика отличается от улова Матроскина на 1 кг. Сколько весил общий улов?

№7. Два велосипедиста выехали одновременно из пункта A в пункт B, каждый с постоянной скоростью. Когда первый проехал треть пути, второму велосипедисту оставалось до середины пути проехать 2,5 км. Когда второй приехал в пункт B, первому велосипедисту оставалось ехать еще 6 км. Найдите расстояние между пунктами A и B.

№8. Два поезда выехали одновременно в одном направлении из городов A и B, расположенных на расстоянии 120 км друг от друга, и одновременно прибыли на станцию C. Если бы один из них уменьшил свою скорость на 12 км/ч, а другой – на 9 км/ч, то они также прибыли бы одновременно на станцию C, но на 2 ч позже. Найдите скорость поездов.

№9. Два брата продали стадо овец, выручив за каждую овцу столько рублей, сколько было в стаде овец. Желая разделить выручку поровну, они поступили следующим образом: каждый брат, начиная со старшего, брал из общей суммы по 10 рублей. После того, как в очередной раз старший брат взял 10 рублей, остаток от выручки оказался меньше 10 рублей. Желая его компенсировать, старший брат отдал младшему свой нож. Во сколько рублей был оценен этот нож? Все суммы денег – целое количество рублей.

№10. Решите уравнение $log_2(6x-x^2-5)=x^2-6x+11$.

Щеглова Н.В.

Спецкурс №32.

№1. Решите уравнение $\frac{x^2+12x+4}{x+2}=6\sqrt{x}.$

№2. Из натуральных чисел составлены группы (1), (2, 3, 4), (5, 6, 7, 8, 9), … так, что каждая оканчивается квадратом номера группы. Сумма членов 50-й группы равна…

№3. В углы B и C треугольника ABC вписаны окружности радиусов 2 и 3 соответственно, касающиеся биссектрисы угла A. Найти длину этой биссектрисы, если расстояние между точками, в которых окружности касаются стороны BC, равно 7.

№4. Медиана AM и биссектриса CD прямоугольного треугольника ABC(AC - гипотенуза) пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника ABC, если CO равно 9, OD равно 5.

№5. В двух коробках лежат карандаши: в первой красные, во второй – синие, причем количество синих карандашей не более 32. 20% карандашей из первой коробки переложили во вторую. Затем 30% карандашей, оказавшихся во второй коробке, переложили в первую, причем среди них было ровно 4 красных. После этого синих карандашей во второй коробке оказалось на 14 больше, чем в первой, а общее число карандашей в первой коробке по сравнению с первоначальным увеличилось, но не более чем на 4%. Найти общее количество красных карандашей.

№6. Найти площадь фигуры, заданной системой неравенств $\begin{cases} y \le 4-2|x-1|, \\ y \ge 4|x-1|-8. \end{cases}$

№7. Четыре равных шара радиуса R расположены в пространстве так, что каждый из них касается трех остальных. Пятый шар касается всех четырех данных шаров. Найти радиус этого шара.

№8. Найдите уравнение прямой, образующей с прямой $y=-3x+2$ угол 30° и проходящей через начало координат.

№9. Трое рабочих разной квалификации выполнили некоторую работу, причем первый работал 6 ч, второй – 4 ч, третий – 7 ч. Если бы первый работал 4 ч, второй – 2 ч и третий – 5 ч, то было бы выполнено лишь $\frac{2}{3}$ всей работы. За сколько часов рабочие закончили бы работу, если бы они работали вместе одно и то же время?

№10. Около шара, радиус которого равен 5, описана правильная четырехугольная пирамида. Определите высоту пирамиды, если расстояние от центра шара до бокового ребра пирамиды равно 7.

Щеглова Н.В.

Спецкурс №33.

№1. Около шара, радиус которого равен 5, описана правильная четырехугольная пирамида. Определите высоту пирамиды, если расстояние от центра шара до бокового ребра пирамиды равно 7.

№2. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно $\sqrt{3}$. Найдите объем конуса, вписанного в куб так, что его вершина совпадает с вершиной A куба, а окружность основания касается трёх граней куба, не содержащих вершину A, в их центрах.

№3. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2}, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4. \end{cases}$

Для найденного решения системы $(x;\ y)$ в ответ запишите сумму $x\ +\ y$.

№4. Решите уравнение $(\frac{x}{x-1})^2+(\frac{x}{x+1})^2=\frac{45}{16}$.

№5. Сколько всего натуральных чисел, не превышающих 700 и не делящихся ни на 2, ни на 5, ни на 7?

№6. Однажды Ходжа Насреддин и его друг Али поехали на бухарский базар продавать дыни. У Али была 71 дыня, а у Насреддина – 50. У городских ворот их остановили стражники и потребовали налог за ввоз дынь в Бухару. Узнав величину налога и цену за одну дыню на бухарском базаре, Али отдал стражнику в уплату налога 13 дынь, переплатив при этом одну таньгу, а Насреддин – 9 дынь, не доплатив одну таньгу. Сколько же стоит одна дыня? Учтите, что Али и Насреддин платили налог только за те дыни, которые они собирались продавать на базаре.

№7. В экзаменационной комиссии 5 преподавателей. Известно, что первый, второй и четвертый преподаватели могут проверить работы за 20 часов, а второй, третий и пятый – за 15 часов. Если в проверке участвуют все, кроме второго, то на проверку требуется всего 10 часов. Во сколько раз быстрее будет выполнена проверка работ всей комиссией по сравнению с проверкой работ только вторым преподавателем?

№8. На координатной плоскости задан четырехугольник с вершинами в точках $P(2;\ 2), Q(3;\ 4), R(8;\ 5), S(10;\ 1)$. Через вершину R заданного четырехугольника проведена прямая RM, которая делит его на две равновеликие фигуры. Найдите координаты точки M, если известно, что она лежит на прямой PS.

№9. На координатной плоскости постройте множество точек, координаты $(x;\ y)$ которых удовлетворяют неравенству $|x+1|-|1-y|\leq 2$, и определите площадь фигуры, образованной пересечением этого множества и множества, ограниченного прямоугольником с вершинами $\text{A}(0;0), B(0;3), C(4;3), D(4;0)$.

№10. Один из углов треугольника равен $45°$, радиус вписанной в него окружности равен 1, а площадь треугольника равна $18+\sqrt{2}$. Найдите радиус описанной около треугольника окружности.

Спецкурс №34.

B13	Из пунктов A и B, находящихся друг от друга на расстоянии $\sqrt{43}$ м, равномерно и прямолинейно движутся в пункт C две точки. Скорость первой точки равна 1 м/с, скорость второй – 0,5 м/с. Найдите сумму расстояний AC и BC в метрах, если известно, что первая точка прибыла в пункт C на 5 секунд раньше второй и угол ACB равен $60°$.
B14	В основании пирамиды $MABCD$ лежит трапеция $ABCD$ $(BC \parallel AD)$, у которой $AB = CD = 2\sqrt{10}$, $BC = 2\sqrt{5}$, $AD = 6\sqrt{5}$. Сфера касается плоскости основания пирамиды в точке H и прямых MA, MB, MC, MD. Центр сферы и точка M лежат по разные стороны от плоскости основания пирамиды. Найдите площадь сферы S, если объем пирамиды $MABCD$ равен $\frac{320\sqrt{13}}{3}$. В ответ запишите значение выражения $\frac{S}{\pi}$.

№3. Вычислите $\frac{96 sin80° sin65° sin35°}{sin20° + sin50° + sin110°}$

№4. Решите уравнение $\sqrt{log_{4x^2-x}5} \cdot log_5\left(\frac{25}{4x^2-x}\right) = 1$. В ответе укажите сумму корней (или корень, если он единственный), увеличенную в 4 раза, где корни удовлетворяют условию $sinx > ctg2x$.

№5. Решите уравнение $2\sqrt{3}sin5x - \sqrt{3}sinx = cos24x \cdot cosx + 2cos5x - 6$. В ответе укажите сумму корней (в градусах), принадлежащих промежутку $[0; 6\pi]$.

№6. Найдите значение выражения $x + y$, если $|x| + x + y = 5$ и $x + |y| - y = 10$.

№7. Диагонали с длинами $\sqrt{7}$ и 4 делят четырехугольник на части, площади которых образуют арифметическую прогрессию. Найдите площадь четырехугольника S, зная, угол между большей диагональю и меньшей из сторон равен 30^0. В ответе укажите величину $\frac{8}{3\sqrt{3}}S$.

№8. В трапеции $ABCD$ с площадью 36 через вершину A проведена прямая, котора пересекает диагональ BD в точке K, а основание BC – в точке L, причём $BK : KD = 1 : 3, BL : LC = 2 : 1$. Найдите площадь четырехугольника $DKLC$.

№9. Истратив половину денег, я заметила, что осталось вдвое меньше рублей, чем было первоначально копеек, и столько же копеек, сколько было первоначально рублей. Сколько денег я истратила? (Ответ укажите в копейках)

№10. В лесах волшебного острова бродят три вида животных: львы, волки и овцы. Волки могут есть овец, а львы могут есть и овец, и волков. Однако, поскольку это волшебный остров, то если волк съест овцу, он превращается во льва, если лев съест овцу, то он превращается в волка, а если лев съест волка, то он превращается в овцу. Первоначально на острове было 17 овец, 55 волков и 6 львов. Какое максимально возможное число животных может остаться на острове после того, как никакое животное не может больше съесть ни одно другое животное?

Спецкурс №35.

№1. В треугольную пирамиду вписан шар, через центр которого проведена плоскость, параллельная основанию пирамиды и отсекающая от нее пирамиду, длины всех ребер которой равны $3\sqrt{6}$. Найдите радиус шара.

№2. Пусть стоимость алмаза пропорциональна квадрату его массы. При огранке алмаз раскололся на две части. Стоимость одной из частей оказалась на 98,56% меньше, чем первоначальная стоимость алмаза. Найдите, сколько процентов от первоначальной массы алмаза составляет масса этой части.

№3. Найдите количество целых решений неравенства

$$(1+tg^2\frac{\pi x}{4}+cos^2\frac{\pi x}{4})^{-1}<x\cdot 8^{\sqrt{81-x^2}}+\frac{8^{-\sqrt{81-x^2}}}{x}.$$

№4. Дана правильная четырехугольная призма. Через середину высоты (высотой призмы считаем расстояние между центрами ее основания) и середины двух смежных ребер основания призмы проведена плоскость. Ребро основания равно 6, боковое ребро равно $4\sqrt{2}$. Определите площадь получившегося сечения.

№5. $ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма, у которой сторона основания и боковое ребро имеют длину 6. Через середины ребер AB и CC_1 и вершину A_1 призмы проведена секущая плоскость. Найдите площадь сечения призмы этой плоскостью.

№6. В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник. Одна из боковых граней представляет такой же треугольник, при этом она перпендикулярна плоскости основания. Найдите радиус описанного около пирамиды шара, если высота пирамиды равна $30\sqrt{5}$.

№7. Два сосуда равных объёмов до краёв заполнены раствором кислоты одинаковой концентрации. Из первого сосуда отлили 4 л раствора и долили 4 л воды. Потом эту процедуру повторили ещё раз. Из второго сосуда отлили 8 л раствора и долили 8 л воды. Потом эту процедуру повторили ещё раз. В результате концентрация кислоты в первом сосуде стала в 2,25 раза больше, чем во втором. Найдите объём сосуда (в литрах).

№8.

Найдите значение выражения $n\cdot S$, где n – количество, а S – сумма корней уравнения

$$x^2+2x-9-2\sqrt{x^2+2x}+4\sqrt[4]{x^2+2x}=6\left(2\sqrt[4]{x^2+2x}-1\right).$$

№9.

Найдите сумму наименьшего и наибольшего целых решений неравенства

$$(\sin^8 3+\cos^6 3)^{\log_9\frac{8}{14-x}}\le\sqrt{x+43}-6.$$

№10. Сфера, радиус которой 18, проходит через вершины A и S оснований правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ и делит ребро SC в отношении 1:7, считая от вершины S. Найдите высоту SH пирамиды, если её боковое ребро равно 36.

№11.

Найдите сумму корней уравнения $\log_{\frac{\pi}{6}}\left|\cos\frac{\pi x}{3}\right|-|x+1|+\sqrt{x^2+2x+\frac{1}{\left|\cos\frac{\pi x}{3}\right|}}=0$, принадлежащих промежутку $[-10;20]$.